

# 103 學年度四技二專統一入學測驗 數學 (B) 試題

- 設實數  $2 + \sqrt{3}$  的整數部分為  $a$ ，小數部分為  $b$ 。若  $p$  為有理數且  $b$  為方程式  $ax^2 + px - 6 = 0$  之一根，則  $p = ?$

(A) 3                      (B)  $3\sqrt{3}$                       (C) 6                      (D)  $6\sqrt{3}$ 。
- 下列行列式之值何者與  $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$  之值相等？

(A)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$                       (B)  $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 1 & -2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}$                       (C)  $\begin{vmatrix} a & d & -1 \\ b & e & 2 \\ c & f & -3 \end{vmatrix}$                       (D)  $\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 2 \\ c & f & 3 \end{vmatrix}$ 。
- 已知  $a \neq 2$ ，若方程式  $x^2 + ax + 2 = 0$  之二根差的平方與方程式  $x^2 + 2x + a = 0$  之二根差的平方相等，則  $a = ?$

(A) -6                      (B) -4                      (C) -2                      (D) -1。
- 已知  $(x-3)$  為  $x^3 + kx - 6$  之因式，則下列何者為  $x^3 + kx - 6$  之因式分解？

(A)  $(x-3)(x-2)(x-1)$                       (B)  $(x-3)(x-2)(x+1)$   
 (C)  $(x-3)(x+2)(x-1)$                       (D)  $(x-3)(x+2)(x+1)$ 。
- 設  $a, b, k$  為常數。若對每一實數  $x$  皆滿足  $x^4 - x^3 - 2x^2 + 13x + k = (x^2 + 2x + a)(x^2 - 3x + b)$ ，則  $k = ?$

(A) -5                      (B) -3                      (C) 3                      (D) 5。
- 設  $x, y, z$  皆為正實數，且  $xy + yz + zx = 27$ ，則  $xyz$  之最大值為何？

(A)  $12\sqrt[3]{2}$                       (B) 18                      (C) 27                      (D)  $27\sqrt[3]{2}$ 。
- 設  $f(x) = (x^2 + 2)^2$ ，求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$

(A) 6                      (B) 8                      (C) 9                      (D) 12。
- 求定積分  $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} (\pi^2 x + \pi) dx = ?$

(A)  $\frac{5}{2}$                       (B)  $\frac{7}{2}$                       (C)  $\frac{9}{2}$                       (D)  $\frac{11}{2}$ 。
- 不等式  $\frac{3}{5x+10} < \frac{x}{5}$  的解為下列何者？

(A)  $x < -2$  或  $x > 1$                       (B)  $x < -2$  或  $x > 3$   
 (C)  $x < -3$  或  $x > 1$                       (D)  $-3 < x < -2$  或  $x > 1$ 。

10. 求  $\frac{\log_5 \sqrt{2} \cdot \log_7 9}{\log_5 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \log_7 \sqrt[3]{4}} = ?$
- (A)  $\frac{-5}{2}$                       (B)  $\frac{-3}{2}$                       (C)  $\frac{-2}{3}$                       (D)  $\frac{1}{3}$ 。
11. 設方程式  $49^x + 5 \cdot 7^x - 24 = 0$ ，則  $7^{x+1} = ?$
- (A)10                      (B)14                      (C)21                      (D)28。
12. 已知平面上三點  $A(5, 0)$ 、 $B(1, -12)$  及  $C(-4, -7)$ ，若  $D(x, y)$  為線段  $\overline{AB}$  上一點且線段  $\overline{CD}$  垂直於  $\overline{AB}$ ，則  $x+y = ?$
- (A)-4                      (B)-5                      (C)-6                      (D)-7。
13. 已知某銳角  $\theta$  滿足  $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ，求  $\tan 2\theta = ?$
- (A)  $\frac{13}{12}$                       (B)  $\frac{4}{3}$                       (C)  $\frac{12}{5}$                       (D)  $\frac{24}{7}$ 。
14. 已知  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{8}{3}$ ，則  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = ?$
- (A)  $\frac{1}{4}$                       (B)  $\frac{3}{4}$                       (C)  $\frac{5}{4}$                       (D)  $\frac{7}{4}$ 。
15. 設平面上三點  $A(x, y)$ 、 $B(-1, 4)$  及  $C(9, -1)$ 。若向量  $\vec{AD} = \frac{2}{5} \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{AC}$ ，則  $D$  點坐標為何？
- (A)(1, 5)                      (B)(3, 2)                      (C)(5, 1)                      (D)(2, 3)。
16. 已知循環小數  $0.\bar{9} = 0.9999\dots$ ，令  $a = 0.\bar{9} \times 0.9$ ，則下列何者正確？
- (A)  $a < 0.8\bar{9}$                       (B)  $a = 0.8\bar{9}$                       (C)  $a < 0.9$                       (D)  $a > 0.9$ 。
17. 設向量  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  之夾角為  $60^\circ$ ，且  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，則向量  $\vec{a}$  和  $(-\vec{a} + 2\vec{b})$  之夾角為何？
- (A)  $30^\circ$                       (B)  $60^\circ$                       (C)  $90^\circ$                       (D)  $120^\circ$ 。
18. 設  $x \geq -1$  且  $y \geq -2$ ，求共有幾組整數解  $(x, y)$  滿足方程式  $x+y=2014$ ？
- (A)2018                      (B)2019                      (C)2020                      (D)2021。
19. 求正整數  $a=2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{11}$  的所有正因數中，8 的倍數有幾個？
- (A)576                      (B)288                      (C)144                      (D)96。
20. 設  $A$  及  $B$  為樣本空間  $S$  中的兩事件，已知  $P(A) = \frac{1}{4}$  及  $P(B) = \frac{1}{5}$ 。若  $P(A' \cup B') = \frac{2}{5}$ ，求事件  $A$  發生或事件  $B$  發生的機率為何？
- (A)  $\frac{19}{20}$                       (B)  $\frac{17}{20}$                       (C)  $\frac{9}{20}$                       (D)  $\frac{1}{20}$ 。

21. 同時投擲一粒公正骰子與兩枚均勻硬幣，若兩硬幣均出現正面，則給骰子出現點數的兩倍金額；若兩硬幣出現一正一反，則給骰子出現點數的金額；若兩硬幣均出現反面，則不給錢，求每次投擲所得金額之期望值？  
 (A)2 (B) $\frac{5}{2}$  (C)3 (D) $\frac{7}{2}$ 。
22. 已知一矩形的長為  $2\cos 1^\circ \cos 2^\circ$ ，寬為  $2\sin 1^\circ \csc 4^\circ$ ，則此矩形面積為何？  
 (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。
23. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長  $a, b, c$  滿足  $(a-b)^2 = c^2 - (2 + \sqrt{3})ab$ ，若 $\angle C$ 為邊長  $c$  所對應的角，則 $\angle C = ?$   
 (A) $30^\circ$  (B) $60^\circ$  (C) $150^\circ$  (D) $120^\circ$ 。
24. 已知平面上有一圓  $C: (x-a)^2 + y^2 = 1$  與直線  $L: y = x$  相交於兩點，則  $a$  可能為下列何者？  
 (A) $a = -2$  (B) $a = 1$  (C) $a = 2$  (D) $a = 3$ 。
25. 已知平面上有一雙曲線方程式為  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ，下列何者為其漸近線？  
 (A) $\frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 0$  (B) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$  (C) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$  (D) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ 。

**【解答】**

- 1.(C) 2.(B) 3.(A) 4.(D) 5.(A) 6.(C) 7.(D) 8.(A) 9.(D) 10.(B)  
 11.(C) 12.(D) 13.(D) 14.(A) 15.(C) 16.(B) 17.(C) 18.(A) 19.(B) 20.(A)  
 21.(D) 22.(A) 23.(C) 24.(B) 25.(B)

# 103 學年度四技二專統一入學測驗

## 數學 (B) 試題詳解

- 1.(C) 2.(B) 3.(A) 4.(D) 5.(A) 6.(C) 7.(D) 8.(A) 9.(D) 10.(B)  
 11.(C) 12.(D) 13.(D) 14.(A) 15.(C) 16.(B) 17.(C) 18.(A) 19.(B) 20.(A)  
 21.(D) 22.(A) 23.(C) 24.(B) 25.(B)

$$1. \quad 2 + \sqrt{3} = a + b \begin{cases} a=3 \\ b=\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

方程式  $3x^2 + px - 6 = 0$

$$\begin{aligned} \text{將 } x=b=\sqrt{3}-1 \text{ 代入 } &\Rightarrow 3(\sqrt{3}-1)^2 + p(\sqrt{3}-1) - 6 = 0 \\ &\Rightarrow 3(4-2\sqrt{3}) + p(\sqrt{3}-1) - 6 = 0 \\ &\Rightarrow p(\sqrt{3}-1) = -6 + 6\sqrt{3} \\ &\Rightarrow p = 6 \end{aligned}$$

$$2. \quad (\text{B}) \quad \begin{vmatrix} d & e & f \\ 1 & -2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} \dots\dots \text{對第 2 列降階}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ b & c \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} d & f \\ a & c \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} d & e \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$3. \quad (1) x^2 + ax + 2 = 0 \text{ 二根為 } \alpha, \beta \begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha \beta = 2 \end{cases}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-a)^2 - 4 \cdot 2 = a^2 - 8$$

$$(2) x^2 + 2x + a = 0 \text{ 二根為 } \alpha', \beta' \begin{cases} \alpha' + \beta' = -2 \\ \alpha' \cdot \beta' = a \end{cases}$$

$$(\alpha' - \beta')^2 = (\alpha' + \beta')^2 - 4\alpha'\beta' = (-2)^2 - 4 \cdot a = 4 - 4a$$

$$(3) (\alpha - \beta)^2 = (\alpha' - \beta')^2 \Rightarrow a^2 - 8 = 4 - 4a \Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -6 \text{ or } a = 2 \text{ (不合)}$$

$$4. \quad (1) f(x) = x^3 + kx - 6$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow 27 + 3k - 6 = 0 \Rightarrow k = -7$$

$$\begin{aligned} (2) x^3 + kx - 6 = x^3 - 7x - 6 \text{ (利用戳根)} &= (x+1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x+1)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1+0-7-6 \quad | \quad -1 \\ +) \quad -1 \quad 1 \quad 6 \\ \hline 1-1-6 \quad | \quad 0 \end{array}$$



$$10. \text{原式} = \frac{\log_5 2^{\frac{1}{2}} \cdot \log_7 3^2}{\log_5 3^{-1} \cdot \log_7 2^{\frac{2}{3}}} = \frac{\log_5 2 \cdot \log_7 3}{-\frac{2}{3} \log_5 3 \cdot \log_7 2} = \frac{\frac{\log 2}{\log 5} \cdot \frac{\log 3}{\log 7}}{-\frac{2}{3} \cdot \frac{\log 3}{\log 5} \cdot \frac{\log 2}{\log 7}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$11. 49^x + 5 \cdot 7^x - 24 = 0 \Rightarrow (7^x)^2 + 5 \cdot 7^x - 24 = 0 \Rightarrow (7^x + 8)(7^x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 7^x = -8 (\text{不合}) \text{ or } 7^x = 3$$

$$7^{x+1} = 7 \cdot 7^x = 7 \cdot 3 = 21$$

$$12. m_{\overline{AB}} = \frac{0 - (-12)}{5 - 1} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AB} : 3x - y = 15$$

$$\because \overline{CD} \perp \overline{AB}, m_{\overline{CD}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{CD} : x + 3y = -25$$

$$D(x, y) \begin{cases} 3x - y = 15 \\ x + 3y = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 45 \\ x + 3y = -25 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -9$$

$$\Rightarrow x + y = -7$$

$$13. \cos \theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{array}{c} 5 \\ \theta \\ 4 \end{array} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4}$$

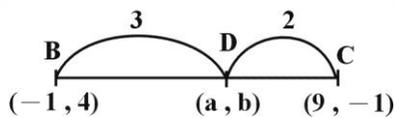
$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

$$14. \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = -\frac{8}{3}$$

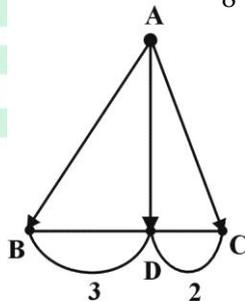
$$\Rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = 1 + 2(-\frac{3}{8}) = \frac{1}{4}$$

$$15. \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AC} \Rightarrow$$



$$\text{由內分點} \begin{cases} a = \frac{3 \cdot 9 + 2(-1)}{3+2} = 5 \\ b = \frac{3(-1) + 2 \cdot 4}{3+2} = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow D(5, 1)$$

$$16. \left. \begin{aligned} a &= 0.\bar{9} \times 0.9 = 1 \times 0.9 = 0.9 = \frac{9}{10} \\ 0.8\bar{9} &= \frac{89-8}{90} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10} \end{aligned} \right\} \text{故 } a = 0.8\bar{9}$$

$$17. \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{a}(-\bar{a} + 2\bar{b}) = -|\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$\therefore$ 內積=0  $\Rightarrow$ 垂直  $\Rightarrow$ 夾角  $90^\circ$

$$18. x + y = 2014$$

x	-1	0	1	...	...	2016
y	2015	2014	2013	...	...	-2

$\Rightarrow$  整數解有2018組

$$19. 8 = 2^3 \dots \text{即 } 2 \text{ 的次方至少須有 } 3 \text{ 次；與 } 3、5 \text{ 無關}$$

$$8 \text{ 的倍數之正因數個數} = 3 \cdot (7+1)(11+1) = 288$$

$$20. P(A') = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4} \quad P(B') = \frac{1}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{5}$$

$$P(A' \cup B') = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{A} \\ \hline \text{B} \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{19}{20}$$

$$21. \left. \begin{array}{l} \text{硬幣} \quad \text{骰子} \\ \text{正正} \quad 1 \sim 6 \\ \text{正反} \quad 1 \sim 6 \\ \text{反正} \quad 1 \sim 6 \\ \text{反反} \quad 1 \sim 6 \end{array} \right\} 24$$

$$\begin{array}{l} \text{正正} \qquad \qquad \qquad \text{正反；反正} \\ \text{期望值} = \frac{1}{24} \cdot 2(1+2+3+4+5+6) + \frac{2}{24} \cdot 1(1+2+3+4+5+6) \\ = \frac{42}{24} + \frac{42}{24} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2} \end{array}$$

$$22. \begin{aligned} \text{矩形面積} &= (2\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ)(2\sin 1^\circ \cdot \cos 4^\circ) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \\ &= 2\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \\ &= \sin 4^\circ \cdot \csc 4^\circ \dots \dots \sin 4^\circ \text{與 } \csc 4^\circ \text{互為倒數} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23. \quad & (a-b)^2 = c^2 - (2 + \sqrt{3})ab \\
 & \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2ab - \sqrt{3}ab \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -\sqrt{3}ab \\
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-\sqrt{3}ab}{2ab} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \therefore \angle C &\stackrel{\text{II}}{=} 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ
 \end{aligned}$$

24. 圓心  $O(a, 0)$ ,  $r=1$

$$L: x - y = 0$$

$$d(0, L) = \frac{|a-0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$$

$$\because \text{相交於兩點} \Rightarrow d < r \Rightarrow \frac{|a|}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow |a| < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \cdots \text{故選(B)}$$

$$25. \text{漸近線} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$$

# ALeader