

103 學年度四技二專統一入學測驗

數學 (C) 試題

1. 已知平面三向量 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (x, -9)$, $\vec{c} = (-8, y)$ 。設 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 且 $\vec{b} \parallel \vec{c}$, 則 $y - x$ 之值為何?
 (A) -18 (B) -6 (C) 6 (D) 18。
2. 設 F, F' 為橢圓 $25x^2 + 9y^2 = 225$ 的二焦點, 點 $P(-3, 0)$ 為橢圓上一點, 則 $\overline{PF} + \overline{PF'}$ 之值為何?
 (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 15。
3. 設 $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = 3 - x^2$, 則定積分 $\int_{-3}^3 [f(x) - g(x)] dx$ 之值為何?
 (A) 0 (B) 18 (C) 42 (D) 54。
4. 設一等比級數的第三項為 4, 公比為 $-\frac{1}{3}$, 前 n 項和為 $\frac{6560}{243}$, 則 n 之值為何?
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。
5. 求 $(\sqrt[3]{3} - 2)(\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 4)$ 之值為何?
 (A) -5 (B) -3 (C) 8 (D) 11。
6. 設 x, y, k 均為實數, 若 $|x + 1| + |2x - y + 4| + |x + 3y + k| = 0$, 則 k 之值為何?
 (A) 3 (B) 1 (C) -4 (D) -5。
7. 設 $A(0, 0), B(2, 2)$ 為平面上二點, 若點 $P(m, n)$ 在線段 \overline{AB} 上, 且 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$, 則 $m + n$ 之值為何?
 (A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5。
8. 設 $\sin(-45^\circ) \cdot \sin 15^\circ = k - \cos 45^\circ \cdot \cos(-15^\circ)$, 則 k 之值為何?
 (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 設三邊長之比 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 7 : 5 : 3$, 則 $\triangle ABC$ 之最大內角為何?
 (A) 75° (B) 90° (C) 120° (D) 135° 。
10. 設直線 $8x + y = c$ 為拋物線 $y = 4(x - 1)^2$ 之切線, 則 c 之值為何?
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7。
11. 設 $(\frac{1}{2})^a = \frac{1}{70}$, $(\frac{1}{4})^b = \frac{1}{2500}$, $(\frac{1}{8})^c = \frac{1}{216000}$, 則 a, b, c 三個數的大小關係為何?
 (A) $b < c < a$ (B) $c < b < a$ (C) $c < a < b$ (D) $a < b < c$ 。

12. 將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一列，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？
(註：凡是末兩位數是 4 的倍數者即為 4 的倍數)
(A)18 (B)20 (C)24 (D)36。
13. 關於 $(x - \frac{2}{x})^8$ 展開式中，下列敘述何者正確？
(A)常數項為 1160 (B) x^2 項係數為 -448
(C) x^4 項係數為 -112 (D) x^{-8} 項係數為 -256。
14. 設 α, β 為方程式 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 的兩根，則 $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 之值為何？
(A) $-\frac{7}{3}$ (B) $\frac{17}{3}$ (C) $\frac{19}{3}$ (D) $\frac{20}{3}$ 。
15. 三階行列式 $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 304 \end{vmatrix}$ 之值為何？
(A)-202 (B)-201 (C)-101 (D)-100。
16. 設 $z = \frac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，則 $|z|$ 之值為何？
(A)1 (B) $\sqrt{2}$ (C)2 (D)13。
17. 設 $z_1 = (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})^4$ ， $z_2 = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^2$ ，則 $\frac{z_1}{z_2}$ 之值為何？
(A)-1 (B)i (C)0 (D)1。
18. 設 $x > 0, y > 0, x + y = 6$ ，則 xy^2 之最大值為何？
(A)16 (B)18 (C)25 (D)32。
19. 在聯立不等式組 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y - 6 \leq 0, x + 2y - 6 \leq 0$ 的可行解區域中， x, y 均為整數解的點坐標 (x, y) 共有多少個？
(A)8 (B)9 (C)11 (D)無限多個。
20. 設平面二向量 $\vec{u} = (2\cos \theta, \sin \theta)$ ， $\vec{v} = (\sin \theta, 2\cos \theta)$ 且其內積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ ，若 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則 θ 之值可能為何？
(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$ 。
21. 設 $f(x) = \frac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$ ，則導數 $f'(0)$ 之值為何？
(A)-2 (B)-1 (C)0 (D)2。
22. 設 a, b, c 三個數均為正實數，且已知 $a + c = 36$ ，若 $a, b, 12$ 三數成等差數列，且 $2, b, c$ 三數成等比數列，則下列敘述何者有誤？
(A) $b + c = 32$ (B) $a + b = 12$ (C) $b^2 = 2c$ (D) $2b = a + 12$ 。

23. 化簡 $\frac{2 + \log_{10} 4 - \frac{1}{3} \log_{10} 216 + \frac{1}{4} \log_{10} 625 + \frac{1}{5} \log_{10} 243}{1 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{6}{5} + \log_2 \frac{7}{6} + 3 \log_8 \frac{8}{7} + 2 \log_4 \frac{9}{8} - \log_4 9}$ 得其值為何？

- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3。

24. 某位老師想了解某班級學生數學程度，隨機抽取十一位同學得到他們入學考的數學成績如下：

60、55、20、45、70、90、30、60、45、45、30(單位：分)，已知其算數平均數等於 50，則這些分數的樣本標準差為何？(註：樣本標準差 $S =$

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

- (A) 15 分 (B) 20 分 (C) 25 分 (D) 30 分。

25. 已知一袋中有大小相同的球共 200 顆，每顆球上都印有一個不同的號碼，分別是 1 至 200 號，今從袋中隨機抽出一球，假設每球被抽中的機會均等，則下列敘述何者正確？

- (A) 被抽中的球號是 3 的倍數或者是 5 的倍數的機率為 $\frac{94}{200}$
 (B) 被抽中的球號不是 3 的倍數而且是 5 的倍數的機率為 $\frac{30}{200}$
 (C) 被抽中的球號是 3 的倍數而且不是 5 的倍數的機率為 $\frac{53}{200}$
 (D) 被抽中的球號不是 3 的倍數而且不是 5 的倍數的機率為 $\frac{113}{200}$ 。

ALeader

【解答】

- 1.(B) 2.(C) 3.(B) 4.(B) 5.(A) 6.(D) 7.(C) 8.(B) 9.(C) 10.(A)
 11.(A) 12.(A) 13.(B) 14.(C) 15.(D) 16.(A) 17.(D) 18.(D) 19.(C) 20.(A)
 21.(D) 22.(A) 23.(D) 24.(B) 25.(C)

103 學年度四技二專統一入學測驗

數學 (C) 試題詳解

- 1.(B) 2.(C) 3.(B) 4.(B) 5.(A) 6.(D) 7.(C) 8.(B) 9.(C) 10.(A)
 11.(A) 12.(A) 13.(B) 14.(C) 15.(D) 16.(A) 17.(D) 18.(D) 19.(C) 20.(A)
 21.(D) 22.(A) 23.(D) 24.(B) 25.(C)

1. (1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow [3, 4] \cdot [x, -9] = 0$

$$\Rightarrow 3x - 36 = 0 \Rightarrow x = 12$$

$$\vec{b} \parallel \vec{c} \Rightarrow [12, -9] \parallel [-8, y] \Rightarrow \frac{12}{-8} = \frac{-9}{y}$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{9}{y} \Rightarrow 3y = 18 \Rightarrow y = 6$$

$$\therefore y - x = 6 - 12 = -6$$

2. 橢圓: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$

$$a^2 = 2.5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$$

3. 原式 = $\int_{-3}^3 [(2x^2 - 3) - (3 - x^2)] dx$

$$= \int_{-3}^3 (3x^2 - 6) dx = \left(\frac{3}{3} x^3 - 6x \right) \Big|_{-3}^3$$

$$= (27 - 18) - (-27 + 18) = 54 - 36 = 18$$

4. $a_3 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow 4 = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow a_1 = 36$

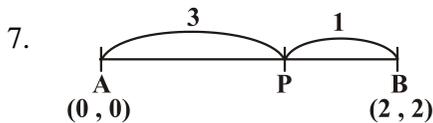
$$\therefore S_n = \frac{36 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{6560}{243} \Rightarrow 36 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{6560}{243} \times \frac{4}{3}$$

$$1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{6560}{6561} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{6561} = \left(-\frac{1}{3}\right)^8 \therefore n = 8$$

5. 令 $A = \sqrt[3]{3}$, $B = 2$

$$\text{原式} = (A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 = 3 - 8 = -5$$

6.
$$\begin{cases} x + 1 = 0 & \Rightarrow x = -1 \\ 2x - y + 4 = 0 & \Rightarrow -2 - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x + 3y + k = 0 & \Rightarrow -1 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = -5 \end{cases}$$



$$P \text{ 點: } \begin{cases} m = \frac{1 \times 0 + 3 \times 2}{3+1} = \frac{3}{2} \\ n = \frac{1 \times 0 + 3 \times 2}{3+1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore m+n=3$$

8. 原式 = $(-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}) = k - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

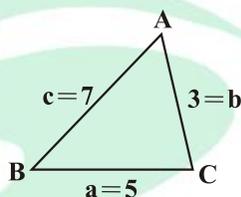
$$\therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

9. $\cos C = \frac{5^2+3^2-7^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{25-40}{10 \times 3} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \angle C \in \text{II}, \angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



10. $m_{\text{切}} = -\frac{8}{1} = -8$

$$\therefore y' = 8(x-1) \times 1 \stackrel{\text{令}}{=} -8$$

$$\Rightarrow x-1 = -1 \Rightarrow x=0 \text{ 代入拋物線}$$

$$\text{得 } y=4 \quad \therefore \text{切點}(0, 4) \text{ 代入切線}$$

$$\therefore 0+4=c$$

11. $(\frac{1}{2})^a = \frac{1}{70} \Rightarrow 2^{-a} = \frac{1}{70}$

$$(\frac{1}{2})^{2b} = \frac{1}{2500} \Rightarrow (\frac{1}{2})^b = \frac{1}{50} \Rightarrow 2^{-b} = \frac{1}{50}$$

$$(\frac{1}{2})^{3c} = \frac{1}{21600} \Rightarrow (\frac{1}{2})^c = \frac{1}{60} \Rightarrow 2^{-c} = \frac{1}{60}$$

$$\therefore -b > -c > -a \Rightarrow b < c < a$$

12. 4 的倍數：□ □ □ $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow 20, 12, 32, 52$

(1) □ □ □ $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}$

$3! \times 1 \times 1 = 6$ 種

(2) □ □ □ $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow 12, 32, 52$

$\nearrow 2 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3$ 類 = 12 種
不排 0

\therefore 共有 $6 + 12 = 18$ 個

13. $c(8, r) \cdot x^{8-r} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^r$

$= c(8, r) \cdot x^{8-r} \cdot (-2)^r \cdot x^{-r}$

$= c(8, r) \cdot (-2)^r \cdot x^{8-2r}$

(A) 令 $8 - 2r = 0 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow$ 常數項 $= c(8, 4) \cdot (-2)^4 = 1120$

(B) 令 $8 - 2r = 2 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow c(8, 3) \cdot (-2)^3 \cdot x^2 = -448x^2$

(C) 令 $8 - 2r = 4 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow x^4$ 項係數 $= c(8, 2) \cdot (-2)^2 = 112$

(D) 令 $8 - 2r = -8 \Rightarrow r = 8$

$\Rightarrow x^{-8}$ 項係數 $= c(8, 8) \cdot (-2)^8 = 256$

14.
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5 \\ \alpha \cdot \beta = \frac{3}{1} = 3 \end{cases}$$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{5^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{19}{3}$

15.
$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 100 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 304 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101 & 1 & 2 \\ 201 & 1 & 2 \\ 301 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 101 & 1 & 2 \\ 100 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -100$$

16. $|z| = \frac{|5-12i| \cdot |3+4i|}{|4-3i| \cdot |12-5i|} = \frac{\sqrt{5^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 1$

17.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{18\pi}{3} + i \sin \frac{18\pi}{3}$$

$= \cos 6\pi + i \sin 6\pi = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$$18. \frac{x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2}}, \frac{6}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot x \cdot y^2} \Rightarrow 8 \geq \frac{1}{4} \times y^2$$

$$\Rightarrow x \cdot y^2 \leq 32$$

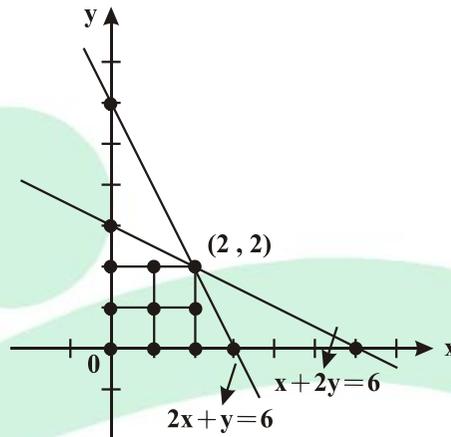
$$19. \begin{array}{l} 2x + y \leq 6 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y \leq 6 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 6 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + y = 6 \\ -) \quad 2x + 4y = 12 \\ \hline \quad \quad -3y = -6 \end{array}$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 2$$

整數點共 11 個



$$20. \vec{u} \cdot \vec{v} = [2\cos \theta, \sin \theta] \cdot [\sin \theta, 2\cos \theta] = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin \theta \cdot \cos \theta + 2\sin \theta \cdot \cos \theta = 1$$

$$\Rightarrow 4\sin \theta \cdot \cos \theta = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin 2\theta = 1 \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$2\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} 21. f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(-1)(-4)}{1 \times 2} = 2 \end{aligned}$$

ALeader

22. $a+c=36\cdots(1)$

$$\text{又} \begin{cases} b = \frac{a+12}{2} \Rightarrow 2b = a+12 \Rightarrow a = 2b-12 \text{ 代入 (1)} \\ b^2 = 2 \cdot c \Rightarrow c = \frac{b^2}{2} \text{ 代入 (1)} \end{cases}$$

$$2b-12 + \frac{b^2}{2} = 36$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{2} + 2b = 48 \Rightarrow b^2 + 4b - 96 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 12 \\ 1 \times -8 \\ \hline \end{array} \quad \therefore b = -12 \text{ 或 } b = 8$$

(不合) (合)

$$\therefore a = 2 \times 8 - 12 = 4$$

$$c = \frac{64}{2} = 32$$

$$\therefore \text{(A) 錯誤} \quad \therefore b+c = 8+32=40$$

23. 原式 =
$$\frac{\log_{10} 10^2 + \log_{10} 4 - \log_{10} 6 + \log_{10} 5 + \log_{10} 3}{\log_2 2 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{6}{5} + \log_2 \frac{7}{6} + \log_2 \frac{8}{7} + \log_2 \frac{9}{8} - \log_2 3}$$

$$= \frac{\log_{10} \left(\frac{100 \times 4 \times 5 \times 3}{6} \right)}{\log_2 \left(\frac{2 \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{8}{7} \times \frac{9}{8}}{3} \right)} = \frac{\log_{10} 10^3}{\log_2 2} = \frac{3}{1} = 3$$

24.
$$S = \sqrt{\frac{1}{10} [10^2 + 5^2 + (-30)^2 + (-5)^2 + 20^2 + 40^2 + (-20)^2 + 10^2 + (-5)^2 + (-5)^2 + (-20)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10} (4000)} = \sqrt{400} = 20$$

25. (A) $n(3 \text{ 或 } 5 \text{ 的倍數}) = \left(\frac{200}{3}\right) + \left(\frac{200}{5}\right) - \left(\frac{200}{15}\right) = 66 + 40 - 13 = 93 \text{ 個}$

$$\therefore P = \frac{93}{200}$$

(B) $n(\text{非 } 3 \text{ 且為 } 5 \text{ 的倍數}) = \left(\frac{200}{5}\right) - \left(\frac{200}{15}\right) = 40 - 13 = 27 \quad \therefore P = \frac{27}{200}$

(C) $n(\text{為 } 3 \text{ 但非 } 5 \text{ 的倍數}) = \left(\frac{200}{3}\right) - \left(\frac{200}{15}\right) = 66 - 13 = 53 \quad \therefore P = \frac{53}{200}$

(D) $n(\text{非 } 3 \text{ 也非 } 5 \text{ 的倍數}) = 200 - 93 = 107 \quad \therefore P = \frac{107}{200}$